



TITLE:

# ゲームにおけるネットワークの効果について (第4回生物数学の理論とその応用)

AUTHOR(S):

守田, 智

---

CITATION:

守田, 智. ゲームにおけるネットワークの効果について (第4回生物数学の理論とその応用). 数理解析研究所講究録 2008, 1597: 241-245

ISSUE DATE:

2008-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81720>

RIGHT:

## ゲームにおけるネットワークの効果について

静岡大学 工学部 システム工学科 守田 智 (Satoru Morita)

Department of Systems Engineering,  
Shizuoka University

### 1 Introduction

近年, 進化生物学から統計物理学におよぶ広い研究領域で進化ゲームをネットワーク上に拡張したモデルが着目されている. 特に協力行動がどのようなネットワーク構造において進化しやすいかという問題は中心的な研究課題となっている. この問題は, 1992 年の Nowak と May による格子上の囚人のジレンマゲームの研究にその端緒を発している. 彼らは格子のような空間構造によって協力行動が維持されうることを指摘した. Nowak と May のモデルは戦略の更新が同期的で決定論的なセルオートマトンモデルである [1]. 一方, Hauert と Doebeli はスノードリフトゲームにおいて格子構造が協力行動の進化を抑制する場合があると指摘している [2]. さらに協力行動が維持されるかどうかは戦略更新のルールの詳細によることがわかってきている [3]. このように盛んに研究が行われているが (レビューとして [4] がある), 多くの研究は数値計算に頼ったもので, ネットワークの効果が進化ゲームにどのような影響を与えるか理論的に解明されているわけではない.

本研究では, クラスタリング係数に着目してネットワークが進化ゲームの結果に与える影響を解析的に調べた. クラスタリング係数とは, ある一つのノードに着目したときそのリンク先のノード間にもリンクがある比率のことである [5, 6]. 凝縮性の高い社会ネットワークではクラスタリング係数が高く, また数理モデルで用いられる格子もクラスタリング係数が高いといえる<sup>1</sup>. クラスタリング係数の大きさがゲームダイナミクスに与える影響の解析を行う際, ペア近似を駆使する. ペア近似とは平均場近似の拡張であり, 平均場近似が戦略の 1 体分布による近似である一方ペア近似は 2 体分布を用いる [7, 8]. 本研究では従来のペア近似とは異なった拡張を行い, クラスタリング係数が大きくなることは次数が小さくなることと同じ効果をもたらすことを示す.

### 2 モデル

本研究では, ネットワーク上のゲームを以下のように構成する. まず, ネットワークは固定する. つまり, ゲームの対戦結果によるネットワーク構造の変化は無いものとする. これは, ネットワークの時間変化のスケールに比べて戦略の時間変化が早いという近似に対応している. さらにネットワークの各ノードに 1 体のプレイヤーが位置し, 2 つの戦略のうち一方を取るとする. つまり各ノードのが取りうる状態は 2 種類で, 混合戦略は考えない. また TFT のような繰り返しゲームを前提とした複雑な戦略も考えない. つまりプレイヤーそれぞれ自身で学習を行うことは無いとする. このような仮定するのは, ネットワークによる効果のみに着目したいからである.

戦略の更新方法は, 確率的かつ非同期として以下の 3 種類の更新ルールのいずれかで与える (図 1 参照).

<sup>1</sup>ノイマン型正方格子はこのような 3 角形が含まれないが, 4 ノード以上のループを多く含み実質的なクラスタ係数は高いとみなせる

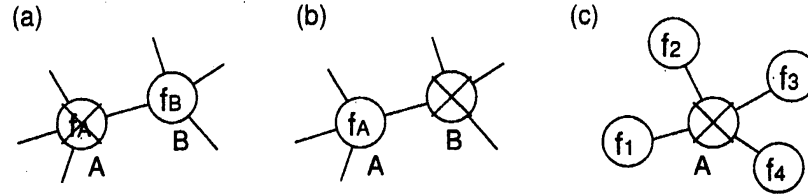


図 1: ゲームの更新ルール. (a) local competition, (b) birth-death, (c) death-birth.  $f_A$  はノード A のフィットネスの値で,  $\times$  は更新され戦略が入れ替わるノードを示す. 詳細は本文.

- local competition (LC)

まずランダムにノードを選ぶ(これを A とする). 次にノード A と隣接するノードをランダムに選ぶ(これを B とする). これら 2 つのノードのフィットネスをそれぞれ  $f_A, f_B$  とする. 確率  $f_B/(f_A + f_B)$  でノード A をノード B の戦略に置き換える. すなわち, このプロセスでは相手をランダムに選んで自分と比較する.

- birth-death (BD)

まずフィットネスに比例する確率でノードを 1 つ選ぶ(これを A とする). 次にノード A と隣接するノードをランダムに選ぶ(これを B とする). ノード B をノード A の戦略に置き換える. すなわち, このプロセスでは全体のフィットネスを比較する.

- death-birth (DB)

まずランダムにノードを選ぶ(これを A とする) 次にノード A と隣接するノードの中からフィットネスに比例する確率でノードを選ぶ(これを B とする). ノード A をノード B の戦略に置き換える. すなわち, このプロセスでは隣接ノードのフィットネスを比較する.

各ノードに位置するプレイヤーは隣接するノードのプレイヤーとゲームを行い, その利得の平均値からフィットネスを計算する. ゲームとしてスノードリフトゲームを拡張した以下のような利得行列を用いる.

	cooperate	defect
cooperate	$R = b - c/2a$	$S = b - c$
defect	$T = b$	$P = 0$

ここで  $b$  は自分か相手のどちらかが協力していれば得られるベネフィットであり, 両方のプレイヤーが裏切り戦略の場合にのみベネフィットが 0 となる (利得行列の右下). また  $c$  は協力に伴うコストで両方のプレイヤーが協力した場合, 各プレイヤーが負担するコストは  $c/2a$  とする.  $a$  は協力の優位性のパラメーターであり, 双方の協力によってコストを減らす相乗効果があれば  $a > 1$ , 逆に負の相乗効果があれば  $a < 1$  となる.  $a = 1$  の時, 本来のスノードリフトゲームになる. 既存研究に従い

$$r = \frac{c}{2b - c}$$

をコスト利得比 (cost-to-benefit ratio) と呼ぶ [2].

本研究で用いるネットワークはクラスターリング係数の効果を見ることに集中するため、次数を一定としたものに限る。すなわち隣接ノードの数はすべてのノードで等しいとする。次数がノードによって異なる場合は、次数分布の広がりによって結果が異なる。またフィットネスにゲーム利得の平均値を使うか合計を使うかによっても違った結果になる。この場合の理論解析は容易ではない。次数が一定でクラスターリング係数が高いネットワークを構築するため以下のような方法を用いる [9]。

- (i) configuration モデル [6] を用いて、次数が一定数  $z$  のランダムネットワークを作成する。この時、クラスターリング係数はほぼ 0 となっている。
- (ii) リンクをランダムに 2 つ選び、その付け替えを試みる。もし付け替えの結果、クラスターリング係数が高くなってかつ連結性が保たれる場合のみ付け替えを実行する。そうでなければなにもしない。
- (iii) 平均クラスターリング係数が指定した値になるまでプロセス (ii) を繰り返す。

上記の方法によりクラスターリング係数が高いこと以外はランダムなネットワークを構築できる。

### 3 ペア近似

ペア近似とは隣接ペアの状態に着目した近似法である [7, 8]。協力戦略を C、裏切り戦略を D とすると隣接ペアの状態は  $(C, C)$ ,  $(C, D)$ ,  $(D, C)$  の 3 状態に限られる<sup>2</sup>。これらの比率は、規格化条件

$$P_{CC} + P_{CD} + P_{DD} = 1$$

をみたすので、独立な変数は 2 つである。協力（裏切り）戦略を持つノードの隣接ノードが協力（裏切り）戦略である比率は  $P_{C|C} = \frac{P_{CC}}{P_{CC} + P_{CD}/2}$  ( $P_{D|D} = \frac{P_{DD}}{P_{DD} + P_{CD}/2}$ ) となる。3 体以上の相関を無視することがペア近似のキーポイントであり、たとえば  $(C, D)$  リンクの C の別の隣接ノードが協力戦略を持つ確率は単に

$$P_{C|CD} = P_{C|C}$$

で与えられる。ループを含まないツリー構造のネットワークの場合、ペア近似は十分よい結果を与える。次数が小さいランダムネットワークでは、ループが少なくほぼツリー構造が保たれていると考えてよい。格子のようなツリー構造とは程遠いネットワークについては、格子の特性を利用して近似精度を上げる方法がいろいろ提案されている [8, 10, 11, 12]。これらの方法は、一般的なネットワークにはそのまま使えない。

ここではネットワークに存在する 3 角形（3 つのノードからなるループ）にのみ着目してペア近似を拡張する [13]。繋がった 2 辺をランダムに取ってきた時、それが 3 角形の一部である確率は、クラスターリング係数そのものである。さて戦略が変更するのはリンクが

<sup>2</sup> 格子モデルのように上下左右といった方向がないため  $(C, D)$  と  $(D, C)$  は区別しない

異なる戦略を含む時だけである。この事実を考慮すると3角形が  $(C, C, D)$  か  $(C, D, D)$  であるときだけ考えればよい。これらの状態が生じる比率は

$$P_{\Delta CCD} : P_{\Delta CDD} \sim \frac{P_{CC}(P_{CD}/2)^2}{P_C^2 P_D} : \frac{(P_{CD}/2)^2 P_{DD}}{P_C P_D^2} = P_{C|C} : P_{D|D}$$

と計算することができる。ただし上記の式の2番目を導出するため Kirkwood 近似を用いた。したがって平均クラスタリング係数  $c$  とおくとリンク  $(C, D)$  の  $C$  の別の隣接ノードが協力戦略を持つ確率は

$$P_{C|CD} = P_{C|C} \left[ (1-c) + \frac{c}{P_{C|C} + P_{D|D}} \right]$$

と与えられる。ペア近似に上式を用いることによって均衡解の計算を行うことができる。結果は次節に示す。

#### 4 結果

ペア近似による結果を示す前に拡張したスノードリフトゲームのナッシュ均衡を導出しておこう。ナッシュ均衡を協力戦略の頻度で表現すると

$$x_{\text{nash}} = \frac{1-r}{1-r+r/a}$$

と計算できる。ネットワーク構造がない進化ゲームでは、上記のナッシュ均衡は ESS の条件をみたすことが簡単に示せる。この均衡解がネットワーク構造によってどのように変化するかがそもそもの問題であった。前節で取り上げたペア近似を用いると更新ルール LC と BD のいずれの場合にも均衡解は

$$x_{LC} = x_{BD} = \frac{1-r}{1-r+r/a} \frac{z'-1}{z'-2} - \frac{r/a}{1-r+r/a} \frac{1}{z'-2}$$

と計算できる。ここで  $z'$  は見かけの次数であり、実際の次数  $z$  との関係は

$$z' = z - c(z-1)$$

となる。これはクラスタリング係数が大きくなると見かけの次数が減少することを示している。また  $z$  や  $c$  によらず、 $r = a/(a+1)$  で  $x = 1/2$  となり、 $x > 1/2$  ( $r < a/(a+1)$ ) の領域では次数  $z$  の減少（クラスタリング係数  $c$  の増加）が協力戦略を促進し、 $x < 1/2$  ( $r > a/(a+1)$ ) の領域では反対に協力戦略を抑制することがわかる。さらに  $z \rightarrow \infty$  でナッシュ均衡と一致する。

一方、更新ルールが DB の場合は、新たに見かけのゲームパラメータ  $a'$  と  $r'$  を導入することで均衡は

$$x_{DB} = \frac{1-r'}{1-r'+r'/a'} \frac{z'-1}{z'-2} - \frac{r'/a'}{1-r'+r'/a'} \frac{1}{z'-2}$$

と計算でき、これは LC や BD の時の均衡解とおなじ形の数式で与えられる。ただし、ここで見かけのパラメータは

$$a' = \frac{az}{1-2a+z}, \quad r' = \frac{rz}{1+r+z}$$

と与えられる。見かけのゲームパラメータの表式から DB において次数が小さいことが協力の優位性を高め、コスト利得比を低めことがわかる。このため DB では LC や BD に比べ協力戦略がより有利になる。クラスタリング係数の効果は LC や BD と相違なく、 $x > 1/2$  の領域ではクラスタリング係数  $c$  の増加が協力戦略を促進し、 $x < 1/2$  の領域では反対に協力戦略を抑制する。 $z \rightarrow \infty$  では、やはりナッシュ均衡と一致する。

#### 4.1 まとめ

本研究では、ネットワーク上のゲームの均衡解をペア近似を用いて解析解を求めた。クラスタリング係数の効果について考察した。紙面の都合で示せなかったが数値計算と一致を確認している。ノイマン型正方格子上で同様のゲームを行った数値計算結果とも比較し  $c \sim 0.5$  とおいた場合の理論と一致していることも見た。正方格子では3角形は存在しないので直接に理論を適用することはできないが、実質的なクラスタリング係数が0.5くらいであることを示唆している。

今後の課題は、もっと現実的なネットワークへ理論を発展させることである。特に次数分布とクラスタリング係数の相乗効果やネットワークの階層構造がゲームに与える効果を調べる必要があるだろう。また対戦相手の戦略によるつなぎかえのようなネットワーク自体の時間変動も考慮する必要がある。このような発展的な研究を行う際にも本研究の理論的解析が役に立つと期待できる。

#### 参考文献

- [1] M. A. Nowak and R. M. May, *Nature* **359**, 826 (1992).
- [2] C. Hauert and M. Doebeli, *Nature* **428**, 643 (2004).
- [3] M. Nakamaru, H. Matsuda and Y. Iwasa, *J. Theor. Biol.* **184**, 65 (1997).
- [4] G. Szabó and G. Fáth, *Phys. Rep.* **446**, 97 (2007).
- [5] D. J. Watts and S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).
- [6] M. E. J. Newman, *SIAM Rev.* **45**, 167 (2003).
- [7] H. Matsuda, A. Ogita, A. Sasaki and K. Sato, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 1035 (1992).
- [8] K. Sato, H. Matsuda and A. Sasaki, *J. Math. Biol.* **32**, 251 (1994).
- [9] B. J. Kim, *Phys. Rev. E* **69**, 045101(R) (2004).
- [10] Y. Harada, H. Ezoe, Y. Iwasa, H. Matsuda and K. Sato, *Theor. Popul. Ecol.* **48**, 65 (1995).
- [11] S.P. Ellner, A. Sasaki, Y. Haraguchi and H. Matsuda, *Math. bio.* **36**, 469 (1998).
- [12] M. van Baalen, *Pair Approximations for Different Spatial Geometries*, U. Dieckmann, R. Law and J. A. J. Metz (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000), 359.
- [13] S. Morita, *Prog. Theor. Phys.* **119**, 29 (2008).